F. Pachet, Qu’est ce qu’une mélodie intéressante ?, La Recherche, hors série « Les origines de l’Art », novembre 2000

Qu’est-ce qu’une mélodie intéressante ?

François Pachet, Sony CSL-Paris

Introduction

Tout le monde a été dans sa vie touché par une mélodie, une chanson un refrain ou un passage d’un morceau de musique. Ces mélodies sont constituées à partir de matériaux simples (du moins en première approximation) ; quelques notes arrangées en séquence. Comment se fait-il que certaines successions de notes nous plaisent, et pas d’autres ? Ceci relève-t-il entièrement de notre subjectivité ou est-ce que des phénomènes plus généraux sont-ils à l’oeuvre ? Si bien des phénomènes rentrent en jeu pour nous rendre une mélodie intéressante ou non, on aborde ici la question d’une manière purement objective, (la mélodie comme objet d’étude), sans se préoccuper de notre propre capacité à écouter et à percevoir la musique (oh combien importante, mais qui fait l’objet d’une autre article de ce numéro). En d’autre termes on se pose la question : « y-a-t-il quelque chose dans les mélodies « intéressantes » qui les rende telles » et ce, indépendamment de l’auditeur ?

On peut distinguer trois approches pour aborder cette question. D’une part l’approche « copier/coller » consiste à voir une mélodie comme un assemblage particulier d’éléments connus, c’est celle suivie lorsqu’on tente par exemple de simuler une improvisation de Jazz. D’autre part l’approche combinatoire : on considère une mélodie comme un objet qui doit vérifier certaines propriétés bien précises et connues a priori, par exemple celles de l’harmonie Baroque. Enfin, l’approche naturaliste considère la mélodie comme un *phénomène* naturel, et applique des méthodes statistiques pour la modéliser. Sans pouvoir répondre à la question de manière définitive, cet article passe en revue certaines des réponses de ces diverses approches.

Un belle mélodie peut-elle se réduire à la juxtaposition de *patterns* ?

La première piste à suivre pour comprendre ce qu’est une mélodie intéressante est de regarder comment font ceux qui construisent des générateurs automatique de musique. En la matière, un des premiers et plus spectaculaires représentants de cette catégorie est Mozart avec ses jeux de dés musicaux (voir encadré). La voie suivie par Mozart consiste à construire une mélodie par petits bouts, chaque bout étant « pré-composé » par avance. Si le jeu est fascinant (essayez !) les limites du système sont évidentes : les mélodies générées sont toutes plus ou moins similaires, et il est impossible de sortir d’un certain cadre stylistique, d’ou une impression de lassitude au bout de quelques dizaines de mesures.

Néanmoins, cette technique n’est pas aussi naïve que l’on pourrait croire. En intelligence artificielle, les technique dites de « raisonnement à partir de cas » exploitent une hypothèse similaire : notre comportement, même intelligent, ne serait que la juxtaposition de mini comportements déjà connus, et éventuellement légèrement adaptés au problème à résoudre. Suivant cette métaphore (et utilisant les techniques correspondantes), Geber Ramalho a dans sa thèse (Ramalho, 1998) construit un programme jouant du Jazz. Son système produit des lignes de basses, à la manière d’un Jazzman de style BeBop, jouant avec un pianiste et un soliste, sur un thème donné au départ (par exemple *Solar*, de Miles Davis). La technique utilisée est fort simple : elle consiste à rentrer dans la machine des « cas », qui représentent des bouts de lignes de basse typiques d’une situation donnée.

Par exemple, un bassiste pourrait jouer la ligne de basse suivante, si l'harmonie de la mélodie est Do mineur / Fa 7 :

C min 7 F 7

Là où le système fait plus que celui de Mozart, c'est que chaque cas peut être adapté à une situation légèrement différente. Par exemple le système peut changer la première ou la dernière note pour que le résultat soit continu avec le précédent ou le suivant, ou bien encore modifier les hauteurs des notes pour les adapter à une harmonie différente (par exemple do majeur ou lieu de do mineur).

La question posée en titre se pose alors de la manière suivante : un solo produit par un système de cas est-il intéressant ? on a un moyen de répondre, en invoquant Turing et son fameux test, que l'on adapte – ici encore – au contexte. Le test de Turing du Jazz consiste à faire écouter à des auditeurs des chorus produits par la machine et des « vrais » chorus produits par exemple par Ron Carter, et à demander aux auditeurs s'ils peuvent les départager. Le système de Ramalho trompe aisément les auditeurs, et réussit ainsi le Test de Turing du Jazz, dans des contextes bien sûr bien délimités (grille imposée, et écoute sur une ou deux grilles).

Un autre exemple spectaculaire de ce genre d'approche est le système EMS de David Cope. Cope utilise d'autres techniques (pattern matching) pour analyser des structures récurrentes dans les morceaux de musique donnés en entrée de son système, puis pour les recombiner. Les résultats obtenus sont eux aussi très spectaculaires ; il est par exemple impossible à un auditeur non spécialiste de reconnaître que ses fugues de Bach ne sont pas de Bach… (on peut écouter le disque « Classic Music by Computer», Cope 1997).

La question de la réduction d'une mélodie a un assemblage de petits bouts agite aussi les musicologues classiques, en particulier concernant Beethoven que certains « soupçonnent » d'avoir composé ses symphonies par copier/coller (Cf. « Beethoven's compositional process », Kinderman Ed.). Mais ces nombreuses expériences pour aussi fascinantes qu'elles soient, sont malheureusement souvent difficilement reproductibles : soit par ce qu'ils reposent sur des connaissances tellement explicites données au système (les cas) qu'on ne sait plus si c'est le système ou le programmeur qui est à l'oeuvre, soit parce qu'ils nécessitent une intervention humaine (oeuvres de Cope). Finalement, même si l'on sait analyser un corpus de mélodies comme provenant de la juxtaposition de patterns, la qualité de ces mélodies dépend très fortement de la qualité des patterns, sur lesquels on ne sait finalement pas dire grand chose.

Des règles à satisfaire

L'approche combinatoire consiste à considérer une mélodie intéressante comme une mélodie « bien formée », c'est à dire qui doit respecter certaines propriétés bien connues. Dans ce contexte, une mélodie est une « solution » à un problème combinatoire.

Cette vision des choses est profondément ancrée dans la notion même de musique tonale, dont nous devons donc dire quelques mots. La musique dite tonale regroupe la plupart des musiques produites et écoutées en Occident; de la musique Baroque, classique, romantique, mais aussi la plupart des musiques populaires : musiques traditionnelles, Jazz, Rock, pop, variété, etc. Ce type de musique repose sur la notion de tonalité, qui consiste à hiérarchiser les notes entre elles, et à imposer certaines règles quant à leur succession (temporelle donc horizontale) et leur juxtaposition (verticale, dite aussi harmonique). On oppose souvent la musique tonale à la musique atonale, qui rejette le principe de tonalité : musique sérielle (par

exemple dodécaphonique, introduite par l'Ecole de Vienne avec Schoenberg), musique répétitive, électroacoustique, ainsi que bien des musiques traditionnelles non occidentales (africaines, chinoises, etc.).
La musique tonale, outre le fait qu'elle prédomine dans la culture occidentale, se caractérise par le fait qu'elle a depuis longtemps été l'objet de formalisations très poussées, en particulier sous la forme de règles, décrites dans des « traités d'harmonie » (un des premiers théoriciens de la musique tonale est sans doute Jean-Philippe Rameau avec son célèbre traité d'harmonie, mais depuis Rameau, de nombreux traités d'harmonie ont été rédigés). Ces règles définissent en substance des principes qui restreignent les possibilités d'harmonisation à celles qui sont jugées acceptables. Pour donner une idée des ces règles, prenons en une typique : celle dite de la *quinte parallèle* (voir Figure 1).

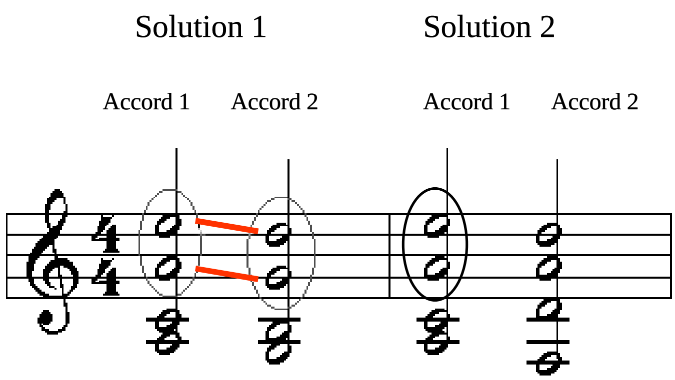

Figure 1. A mélodie égale (mi, ré), deux solutions possibles : dans la première, les accords violent la règle de la quinte parallèle (il y a une quinte parallèle, représentée par les deux traits rouges), mais pas dans la deuxième.

Cette règle stipule que pour un accord donné (4 notes sonnant en même temps), si il existe un intervalle de quinte entre deux quelconques de ses notes alors il ne doit pas y avoir le même intervalle de quinte entre les deux notes correspondantes de l'accord suivant (aux mêmes voies).
Cette règle illustre bien la nature intrinsèquement combinatoire de la musique tonale. Un petit calcul simple permet de mesurer la complexité du problème. Voici un exercice d'harmonie classique : prenons une mélodie de 18 notes, par exemple, le début de la Marseillaise, et tentons de construire un arrangement à quatre voix de cette mélodie. Cet arrangement doit satisfaire les règles d'harmonie des traités, comme celle de la quinte parallèle, et quelques autres. Considérant que chaque voix a 20 valeurs possibles (c'est la tessiture moyenne d'un chanteur, c'est à dire le nombre de notes différentes qu'il peut chanter de la plus basse à la plus aiguë), on obtient un espace de recherche de $(20^{3})^{18} = 20^{54} = 10^{70}$ combinaisons possibles de quatre voix !
On construit ainsi un arrangement à quatre voix à partir d'une mélodie imposée. Mais la généralité des règles est telle qu'elle décrivent tout aussi bien n'importe quel sous ensemble que ce problème classique (par exemple, trouver la mélodie avec une basse impose, ou tout autre combinaison).

Les premiers utilisateurs de ces règles pour la composition sont Hiller & Isaacson. Ces deux chercheurs ont réalisé la première pièce par ordinateur, en 1957, la fameuse « Illiac Suite », entièrement composée par un programme tournant sur un ordinateur Illiac à l'Université d'Illinois. Le programme d'Iller et Isaacson composait une partition, qui était ensuite jouée par de vrais musiciens. En France, Pierre Barbaud s'est fait connaître, dans les années 70, par

ses modélisations de la musique tonale, et a construit plusieurs machines à composer respectant aussi les règles d'harmonie, dont certaines ont été utilisées pour faire de la musique d'accompagnement et même des jingles (voir Brown, 1997 pour une synthèse). Ces programmes tentaient non pas de résoudre le problème général mais de composer, intégrant donc des contraintes propres à chaque compositeur. La plupart des machines ainsi construites font partie de la famille des *automates à états finis.* Ces automates sont particulièrement adaptés pour engendrer des séquences dont on sait parfaitement décrire le processus de construction. Les automates ont ainsi leurs limites : certains styles musicaux peuvent se laisser modéliser facilement, parfois de manière surprenante (voire par exemple comment certaines musiques exotiques se laissent capturer par de simples grammaires dans Baroni & al, 1982), mais ils ne permettent pas véritablement de résoudre les problèmes combinatoires posés par les règles d'harmonie.
De nombreuses recherches ont été menées depuis les années 70 pour résoudre ce problème en général, c'est à dire pour toutes les mélodies possibles. Récemment, les techniques dites de *satisfaction de contraintes,* on permit de calculer toutes les solutions possibles pour des mélodies raisonnables (Pachet & Roy, 2000). Dans ce contexte, on énumère toutes les solutions possibles, un peu comme un programme d'échec essaie d'évaluer le meilleur coup à jouer en essayant toutes les combinaisons des coups des deux joueurs. L'astuce qui permet d'éviter le phénomène d' « explosion combinatoire », du à la taille gigantesque de l'espace de recherche consiste à augmenter l'énumération « brute » par une procédure filtrage, qui permet d'éliminer à l'avance des branches infructueuses dans l'arbre de recherche. La figure 2 montre une solution pour le début de la Marseillaise.

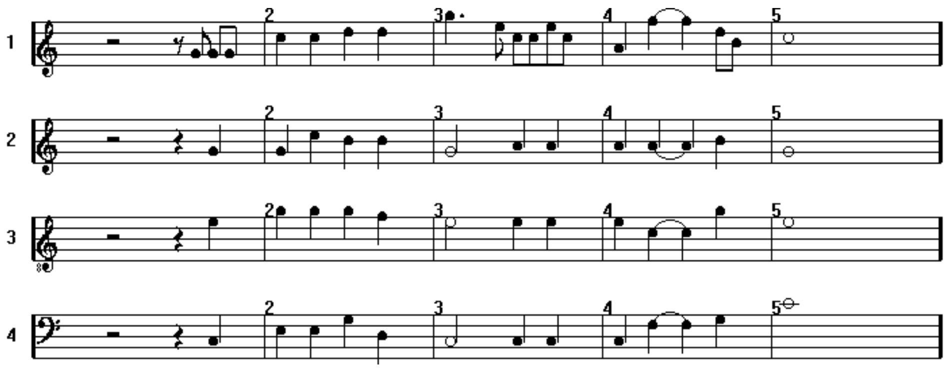

Figure 2. Une harmonisation a quatre voix dans le style Baroque. La première voix (soprano) est imposée (la Marseillaise). Les trois autres voix (2 à 4) sont calculées de manière à satisfaire les règles de base de l'harmonie Baroque (Pachet, 2000).

Ces techniques permettent de résoudre le problème combinatoire de l'harmonisation de manière générale : on peut donc, étant donné un ensemble de règles et un matériau musical donné (par exemple une mélodie ou un bout de mélodie), construire rapidement toutes les solutions possibles. Pour poursuivre l'analogie avec échecs, ou aujourd'hui la machine atteint les performances de l'homme, peut on dire pour autant que nous pouvons engendrer toutes les mélodies « intéressantes » ?
Oui et non. En réalité, seule une partie du problème posé en titre est résolue : lorsque plusieurs solutions sont possibles, la technique ne permet pas de les départager, et se contente de les énumérer. Pour une mélodie comme celle de la figure 1 (la Marseillaise), et avec les règles d'harmonie Baroque standards, on obtient en fait près de deux millions de solutions ! Toutes ces solutions sont, par construction, correctes du point de vue des traités d'harmonie et donc « intéressantes » dans ce sens : par opposition à des mélodies aléatoires, elles vérifient

les bonnes propriétés énoncées par les traités, et représentent donc, en quelque sorte, le minimum requis pour être une bonne mélodie.
Certaines de ces solutions sont néanmoins meilleures que d'autres. Lesquelles ? comment les caractériser ? Donnons quelques pistes.
On peut d'une part tenter de raffiner le modèle combinatoire en essayant non pas de trouver toutes les solutions qui satisfont les règles, mais celle ou celles qui, en plus, optimisent un certain critère musical, jugé souhaitable. Un critère souvent cité est celui des *voix conjointes*, c'est à dire évoluant dans le même sens (montant ou descendant) : deux voix conjointes produisent souvent une harmonie agréable. Un autre critère est d'éviter de faire changer trop souvent la voix de soprano de direction, pour qu'elle ne soit pas trop « heurtée ». Ou encore, il est bon de donner au soprano et à la basse des directions opposées, etc. Autant les règles d'harmonie des traités ont une justification « historique », autant on voit bien que des critères d'optimisation seront nécessairement moins consensuels. On touche là à la limite de notre faculté d'explicitation des connaissances, limite par ailleurs parfaitement connue des compositeurs et pédagogues de la musique, comme le montre par exemple Dubois (1921):
« ... L'élève doit être capable, à la fin de ses études, d'analyser les hardiesses et les licences qui se rencontrent souvent dans les œuvres des plus grands maîtres et qui paraissent en contradiction avec l'enseignement qu'il reçoit. Il doit pouvoir se rendre compte de tout et comprendre pourquoi le génie s'est quelquefois affranchi avec bonheur de la rigueur des règles nécessaires aux études classiques »
Une autre piste consiste à utiliser la métaphore suivante : ce qui intéressant est rare, donc difficile à trouver, voire unique. On peut donc tenter de repérer les mélodies qui sont solutions uniques de certains problèmes combinatoires. Pour reprendre notre exemple de la marseillaise, on constate que l'on diminue notablement le nombre de solutions si l'on impose des contraintes supplémentaires. Par exemple, si l'on impose que la note de basse de la mesure 3 soit un do, on ne trouve plus que 222.000 solutions. Par extension, peut-on dire que plus le problème est « difficile », plus la solution est intéressante ? Cette étude n'a pas encore été menée dans le domaine de la musique tonale, mais dans d'autres il donne des résultats intéressants. Ainsi, Marc Chemillier montre que les mélodies des harpistes Nzakara (Centre Afrique), transmises par tradition orale, sont en fait des canons, solutions uniques de problèmes combinatoires très difficiles (Chemillier, 1999) ! De la même manière, le même auteur analyse un fragment complexe d'une pièce du compositeur Ligeti en montrant qu'il est solution d'un problème de combinatoire sur les mots. Bien qu'il soit toujours possible, pour toute mélodie donnée, de trouver un problème combinatoire dont cette mélodie est solution unique, il s'agit ici de trouver un problème dont l'énoncé soit suffisamment général pour que l'unicité de sa solution soit pertinente. Affaire de compromis, mais la voie est séduisante...

Un fragile compromis entre répétition et variation

Les deux approches précédentes ont en commun qu'elles tentent d'analyser les connaissances musicales permettant de produire des mélodies intéressantes : patterns, ou règles d'harmonie, et ce, de manière locale. Or ce qui rend une mélodie intéressante, c'est aussi qu'elle retient l'attention par un dosage subtile entre variation et répétition, à travers un compromis fragile qui évite cependant à la fois monotonie (trop de répétition) et chaos (pas assez). Ce compromis agit aussi bien sur la structure locale que globale (reprises), ce que ne peuvent faire les techniques précédentes. On peut tenter de modéliser cet équilibre ; donnons-en deux exemples.

F. Pachet, Qu'est ce qu'une mélodie intéressante ?, La Recherche, hors série « Les origines de l'Art », novembre 2000

D'une part on peut modéliser une mélodie comme un *phénomène naturel*. Dans les années 70, de nombreux chercheurs, Mandelbrot en particulier, se sont intéressés à certaines régularités de phénomènes naturels complexes : les fluctuations des cours du Nil, de la bourse américaine, les effondrements de tas de sable, et autres phénomènes échappant aux cadres théoriques classiques. Parmi ces régularités, a émergé une propriété statistique appelée « 1 / f », qui semble être caractéristique de ces phénomènes, par opposition à des phénomènes artificiels ou aléatoires. L'idée est qu'un certaine grandeur caractéristique de ces phénomènes (par exemple la nombre de crues du Nil ayant une amplitude donnée) varie statistiquement comme une puissance de sa fréquence (f), et particulièrement la puissance –1 (inverse). Plus exactement c'est la *densité spectrale* d'un signal qui varie comme l'inverse de la fréquence. La densité spectrale peut se voir comme une caractérisation de la fluctuation moyenne dans le temps d'une grandeur. Per Bak (1994) a proposé récemment un modèle très simple pour les tas de sable qui exhibe lui aussi une telle propriété.

Dans cette lignée, Richard Voss a fait une observation passionnante, appliquant les visions chaotiques de l'époque à la musique (décrite dans Voss (1975), et par Martin Gardner dans Gardner (1992)). L'expérience consiste à comparer trois types de mélodies, chaque type de mélodie étant créé à partir de trois processus aléatoires différents.

Dans le premier cas on crée des mélodies purement aléatoires, c'est à dire que chaque note est tirée au hasard parmi un ensemble de notes possible (par exemple l'octave). Les mélodies résultantes sont donc parfaitement non corrélées.

Dans le troisième cas, on fabrique une mélodie qualifiée de « brownienne » : chaque note est calculée à partir de la note précédente, plus ou moins un certain delta, tiré au hasard (par exemple + ou – 1). Les mélodies résultantes sont parfaitement corrélées, par construction, et ressemblent, graphiquement à des espèces d'escaliers.

Dans le deuxième cas, intermédiaire entre chaos absolu (1er cas) et Corrélation absolue (3eme cas) on produit des mélodies ayant la propriété 1/F (voir encadré). L'expérience menée par Richard Voss a consisté à faire entendre ces trois types de mélodies à des étudiants d'université de divers niveau musical, pendant deux ans. Dans la plupart des cas les mélodies an 1 /f sont jugées plus « intéressantes » que les deux autres (soient trop « corrélées », soit trop aléatoires). De même Voss remarque que les signaux audio de musique exhibent eux aussi la propriété 1/F (et pas les signaux d'autre type). Enfin, on peut aisément analyser la densité spectrale de partitions musicales réelles et observer, aussi, qu'elles sont statistiquement en 1/F. Ainsi, ce que propose Voss, est une mesure du « compromis magique » évoqué plus haut. Bien sûr, la propriété 1/F n'est pas une propriété suffisante : les mélodies ainsi produites ne sont pas de la musique à proprement parler, mais elles ont assurément un caractère « naturel » qui les rend particulièrement intéressantes.

Une autre manière de modéliser ce compromis entre répétition et variation, peut être trouvée dans le domaine de la combinatoire sur les mots, avec la fameuse séquence de Thue-Morse (voir Allouche & Johnson, 1995 ou Assous, 1997). Cette séquence, introduite initialement par Axel Thue au début du siècle, possède des propriétés très intéressantes en termes de répétition et non répétition. Cette séquence infinie est construite avec uniquement deux symboles (par exemple 0 et 1), et ne contient aucun « cube », c'est à dire aucune répétition du même symbole ni de la même suite de symboles 3 fois. Elle est ainsi infinie, non périodique, mais telle que toute sous séquence s'y retrouve un nombre infini de fois : elle est donc en quelque sorte infiniment pareille, mais sans jamais se répéter… Une des raisons du relatif succès de ces séquences dans le domaine musical est, comme les séquences 1/f, probablement du au fait que l'on peut les produire par des mécanismes très simples ; en l'occurrence des morphismes (voire encadré). Ce type de séquence a été utilisé par des compositeurs de musique contemporaine (par exemple Tom Johnson ou Allouche & Johnson, 1995), et le procédé est maintenant bien connu. Ici encore, le procédé ne permet pas de produire de la musique telle qu'on la connaît usuellement (par exemple de la musique tonale), mais il nous amène au cœur de notre capacité d'attention, et nous montre qu'il est possible d'engendrer des séquences infiniment « intéressantes », pour qui veut bien se prêter au jeu.

Conclusion

Une mélodie peut être intéressante pour de nombreuses raisons. Nous en avons présenté trois qui nous paraissent les plus pertinentes, dans le cadre d'une étude objective, c'est à dire ne prenant pas en compte – délibérément – l'auditeur : une mélodie peut contenir des patterns connus (copier/coller), ou bien satisfaire des règles bien précises (combinatoire). L'approche naturaliste évoquée en dernier lieu oublie les connaissances musicales, et ne considère que les propriétés globales d'une mélodie. Il est probable qu'un modèle intégrant ces différents points de vue (mélodie comme assemblage de patterns / mélodie comme solution de problème / mélodie comme substrat de propriétés globales) soit, *in fine*, le plus pertinent, mais ce modèle reste encore à découvrir.

Références bibliographiques

Jean-Paul Allouche and Tom Johnson « Finite Automata and morphisms in assisted music composition », Journal of New Music Research, Vol. 24, 1995, pp. 97-108.

Roland Assous, "Deux ou trois remarques sur l'utilisation des mots de Thue-Morse en informatique musicale », in Musique et mathématiques, Grame, Lyon, 1997.

Per Bak, How Nature Works: The Science of Self-Organized Criticality, Copernicus Books, 1996.

Baroni, M and Callegari, L. Musical grammars and computer analysis, Olshki, 1982.

Frank Brown, "Les trois ages de la musique par ordinateur", in Recherches et applications en informatique musicale, Hermes, 1998.

Chemillier, Marc. Ethnomusicologie, ethnomathématique. Les logiques sous-jacentes aux pratiques artistiques transmises oralement. Forum Diderot, Société Mathématique Européenne - Ircam , 3 décembre 1999. Disponible sur le web a : http://www.info.unicaen.fr/~marc/publi/diderot

Cope, David. David, "Classical Music Composed By Computer", Centaur, 1997.

Cope, David, Experiments in Musical Intelligence (The Computer Music and Digital Audio Series ; No. 12), A-R Editions, 1996.

Gardner, Martin, "White, Brown and Fractal Music » in Fractal music, Hypercard and more, W. H. Freeman and Company, New York, 1992; pp. 1-23

Mozart. Voir le site web suivant, qui permet de composer soi-même des menuets suivant la méthode Mozart, et de les écouter: http://sunsite.univie.ac.at/Mozart/dice/mozart.cgi

Ramalho, Geber. Un agent rationnel jouant du Jazz. Thèse de l'université Paris 6, LIP6, janvier 1998.

Pachet, F. Roy, P. "Musical Harmonization with constraints: a survey", Constraints Journal, Kluwer edition, 2000.

Richard F. Voss and John Clarke, "1/F noise in music and speech", Nature, 258, 1975, pp. 317-318.

F. Pachet, Qu'est ce qu'une mélodie intéressante ?, La Recherche, hors série « Les origines de l'Art », novembre 2000

Encars : Produisez vous-même des mélodies « intéressantes »

1) Par copier/coller : Le jeu de dé de Mozart

L'idée de Mozart est de donner un moyen simple, accessible à tous, de produire des menuets. L'idée consiste à concaténer des mesures pré-composées, en autorisant uniquement certaines transitions. Pour « implémenter » cette contrainte, Mozart propose une table de transitions, qui associe à une valeur de dé (entre 2 et 12 puisqu'il y a 2 dés) le numéro de mesure suivante à jouer, en fonction de la mesure courante.

La version originale contient 176 mesures de Menuet et 96 de Trio. Avec deux dés, on détermine chacune des 16 mesures du menuet, soit 11 possibilités pour chacune des 16 mesures. Puis un dé unique est utilisé pour calculer les 16 mesures du Trio. On peut donc, en principe, produire environ 10^{29} compositions.

Parmi toutes ces compositions, certaines seront, bien sûr très semblables. Surtout, certaines seront plus « musicales » que d'autres. Sur ce sujet, Mozart ne dit rien, et se contente de fournir un procédé pour produire des compositions « légales ».

2) Les séquences en 1/F

Si la définition théorique de la densité spectrale pour un signal discret est relativement complexe à mettre en œuvre en pratique, Richard Voss a proposé un algorithme très simple engendrer une suite aléatoire ayant la propriété 1/f, et donc, potentiellement, des mélodies « intéressantes »

L'algorithme consiste a tirer un certain nombre de dés dont on somme les valeurs pour obtenir un nombre. Si on a 3 dés, la somme varie donc entre 3 et 18. Ce nombre peut ensuite être utilisé pour fabriquer, par exemple, une mélodie de 15 notes différentes possibles.

Si l'on tire à chaque étape les 3 dés, on obtiendra des nombres aléatoires, et donc une répartition des valeurs peu intéressante (en fait, elle ne sera pas aléatoire, puisque certaines sommes seront plus fréquentes que d'autres ; mais ce ne sera pas un aléatoire bien plus intéressant). Pour éviter cela, on tire les dés de la manière suivante.

On écrit la suite des nombres entiers en base deux, et on associe à chacune des trois colonnes un dé. On tire à chaque itération seulement le ou les dés correspondant à un bit ayant changé de valeur (passé de 0 à 1 ou de 1 à 0), et on somme tous les dés (y compris les dés qui n'ont pas été re-tirés).

Dé 1	Dé 2	Dé 3	Itération

F. Pachet, Qu'est ce qu'une mélodie intéressante ?, La Recherche, hors série « Les origines de l'Art », novembre 2000

0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	2
0	1	1	3
1	0	0	4
1	0	1	5
1	1	0	6
1	1	1	7

Cet algorithme produit ainsi une séquence aléatoire, mais dont on peut montrer qu'elle est (approximativement) en 1/f. On peut bien sûr augmenter le nombre de dés, leurs valeurs maximales, et aussi associer à chaque somme obtenue non pas seulement une hauteur de note, mais aussi une durée, ou tout autre paramètre.

3) La séquence Thuet-Morse
Voici le morphisme pour produire une séquence infinie sur un alphabet de deux lettres *a* et *b* telle que la séquence ne contienne aucun cube, sans être périodique. On commence par la séquence composée d'une seule lettre, *a*. A chaque itération, on remplace chaque lettre de la séquence précédente par la règle suivante (morphisme) :

$$a \rightarrow ab$$
$$b \rightarrow ba$$

On obtient donc d'abord la séquence *a*, puis *ab*, puis *abba*, puis *abbabaab*, etc. On peut montrer que toute séquence ainsi obtenue est de la forme *ss** (ou *s** est simplement la séquence *s* dans laquelle *a* et *b* ont été inversés). D'autres séquences du même type peuvent être engendrées par des morphismes aussi simples. Par exemple, des séquences sur des alphabets de 3 lettres, ne comportant aucun carré (jamais deux fois de suite le même symbole ou la même suite de symboles).
De même que pour les séquences 1/f, il est facile de transposer ces séquences dans le domaine musical, en associant aux symboles (les lettres *a* et *b* dans notre exemple), des grandeurs musicales (hauteurs de notes, intervalles, durées, etc.).